

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ДГТУ)

Кафедра «Гидравлика, гидропневмоавтоматика и тепловые процессы»

Методические указания  
к выполнению контрольной работы по дисциплине  
«Динамика»

для студентов направления:  
27.03.05 Инноватика

Ростов-на-Дону  
2025 г.

## ЗНАКОМСТВО С СИСТЕМОЙ MATHCAD

Для выполнения контрольной работы студент должен ознакомиться с системой MathCAD (бесплатной лицензией для студентов вузов, которую можно скачать с официального сайта <https://www.ptc.com/ru/try-and-buy/free-trials>). Выполняя контрольную работу варианты заданий выбираются по последней цифре зачетной книги.

Пользовательский интерфейс системы создан так, что пользователь, имеющий элементарные навыки работы с Windows-приложениями, может сразу начать работать с MathCAD.

Под интерфейсом понимается не только легкое управление системой, как с клавишного пульта, так и с помощью мыши, но и просто набор необходимых символов, формул, текстовых комментариев с последующим запуском документов (Worksheets) в реальном времени.

Запустив систему MathCAD из Windows, вы увидите на экране диалоговое окно, первоначально пустое (Рис. 1).

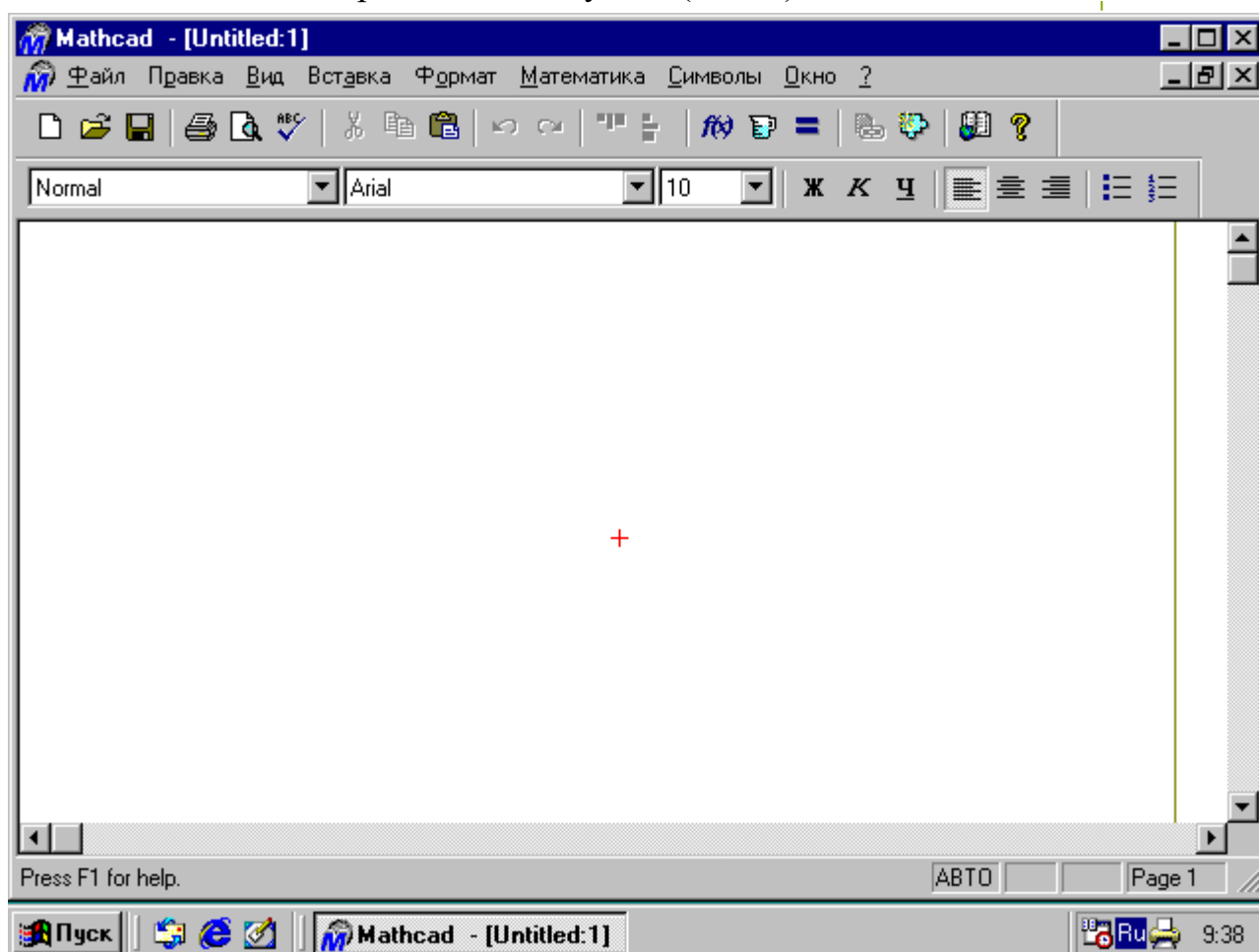


Рис. 1

Над ним видна строка с основными элементами интерфейса. Опции главного меню, содержащиеся в этой строке, легко изучит самостоятельно; некоторые из них очень похожи на стандартные опции, принятые в текстовых редакторах Windows.

Работа с документами MathCAD не требуют обязательного использования возможностей главного меню, так как основные из них

дублируются кнопками быстрого управления, которые расположены в удобных перемещаемых с помощью мыши наборных панелях – палитрах. Наборные панели появляются в окне редактирования документов при активизации кнопок – пиктограмм. Они служат для вывода заготовок – шаблонов математических знаков (цифр, знаков арифметических операций, матриц, знаков интеграла, производных, пределов и др.). Указатель мыши подводим к “Вид” в главном меню, щелкаем левой кнопкой мыши; указатель подводим к “Панели инструментов” и щелкаем левой кнопкой мыши; Выпадает следующее меню. Указатель мыши подводим к “Математика” и щелкаем левой кнопкой мыши. Выпадают наборные панели. (Рис. 2)

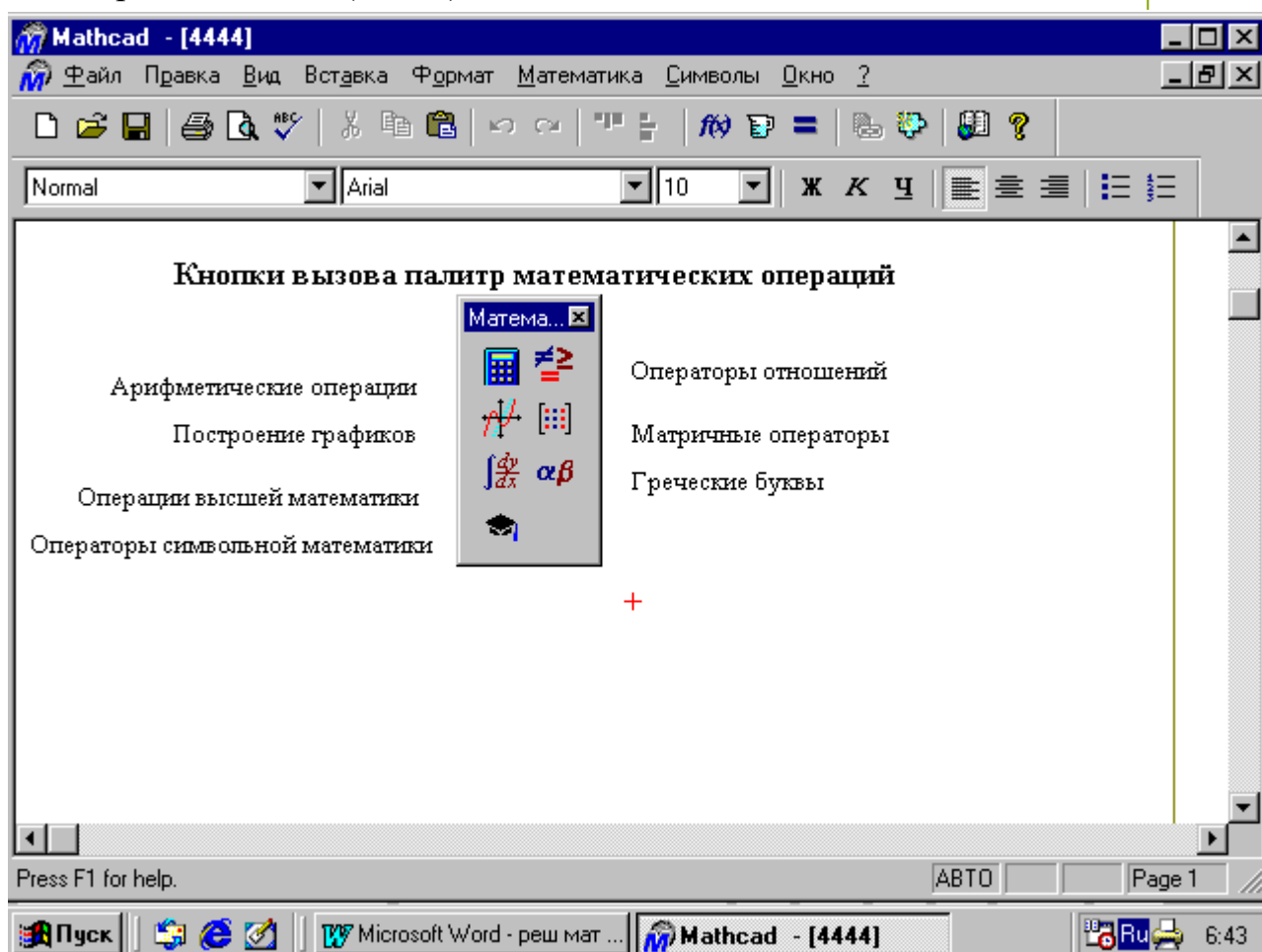


Рис. 2

## ВЫЧИСЛЕНИЯ И ОПЕРАЦИИ В MATHCAD

Приведем примеры решения некоторых типовых математических задач.

Примечание. Решение завершаем щелчком левой кнопки мыши, предварительно уводя указатель мыши за пределы выделенной области набора примера.

Пример 1. Упростить выражение:  $a^2 - b^2$  .

$$2a + 2b$$

Решение. В окне редактирования (далее на экране) набираем исходное выражение

Указатель мыши подводим к опции “Символы” в главном меню и щелкаем левой кнопкой мыши один раз (далее входим в “Символы”). В выпавшем меню указатель мыши подводим к опции “Упростить” и активизируем (щелчком левой кнопкой мыши) указанную опцию. На экране отображается наше выражение, но уже в выделенном виде. Повторяем наши действия: входим в “Символы” (подводим указатель мыши и щелкаем левой кнопкой мыши) и активизируем “Упростить”. На экране появляется ответ :  $\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} b$ .

Пример 2. Вычислить:  $10x^2 - 5y^2$ , при  $x=1,5$  и  $y=-1,6$ .

Решение. На экране набираем; с клавиатуры набираем знак =, компьютер сам поставит знак :=.

$$x: =1.5 \quad y: =-1.6$$

$$10 \cdot x^2 - 5 \cdot y^2 =$$

рядом со знаком равенства читаем ответ : 9.7.

Пример 3. Преобразуйте в многочлен:  $(a + 2 \cdot b) \cdot (a - 2 \cdot b) \cdot (a^2 + 4 \cdot b^2)$ .

Решение. На экране набираем исходное выражение

$$(a + 2 \cdot b) \cdot (a - 2 \cdot b) \cdot (a^2 + 4 \cdot b^2)$$

Входим в меню “Символы”, активизируем “Расширить”. На экране читаем ответ:

$$a^4 - 16 \cdot b^4.$$

Пример 4. Разложите на множители:  $4z^4 - 25k^2$ .

Решение. На экране набираем

$$4 \cdot z^4 - 25 \cdot k^2$$

Входим в меню “Символы”, активизируем “Фактор”. На экране читаем ответ:  $-(5 \cdot k - 2 \cdot z^2) \cdot (5 \cdot k^2 + 2 \cdot z^2)$ .

Пример 5. Разложите на множители:  $12x^3 - 3x^2y - 18xy^2$ .

Решение. На экране набираем  $12 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 \cdot y - 18 \cdot x \cdot y^2$ .

Входим в меню “Символы”, активизируем “Фактор”. На экране читаем ответ:  $3 \cdot (4 \cdot x^2 - x \cdot y - 6 \cdot y^2)$ .

Пример 6. Сократите дробь:  $\frac{x^2 - 2 \cdot m \cdot x + 3 \cdot x - 6 \cdot m}{x^2 + 2 \cdot m \cdot x + 3 \cdot x + 6 \cdot m}$ .

Решение. На экране набираем исходное выражение.

Входим в меню “Символы”, активизируем “Упростить”. На экране читаем ответ:  $(x - 2 \cdot m)$ .

$$(x + 2 \cdot m)$$

Пример 7. Вычислите:  $36^{-1/2} \cdot 27^{1/3} - 81^{1/4} \cdot 5$ .

Решение. На экране набираем искомый пример. Ставим знак равенства и читаем ответ: -0.014.

Пример 8. Решите уравнение:  $2 \cdot (5 \cdot x - 1)^2 + 35 \cdot x - 11 = 0$ .

Решение. Аналитическое решение. Набираем ключевое слово given (дано).

Вводим уравнение  $2 \cdot (5 \cdot x - 1)^2 + 35 \cdot x - 11 = 0$ . Здесь при вводе знака  $=$ , мы вводим знак - логическое равно из палитры, а не с клавиатуры.

Набираем  $\text{find}(x) \rightarrow$ , рядом читаем решение:

- 3 3  
5 10

Пример 9. Решите уравнение:  $y^3 + 6 \cdot y^2 - 16 \cdot y = 0$ .

Решение. Численный поиск корней уравнения.

Для поиска корней искомой переменной, надо присвоить начальное значение, а затем при помощи вызова функции  $\text{root}(f(x), x)$  находим корень.

Набираем на экране

$y := 1$

$\text{root}(y^3 + 6 \cdot y^2 - 16 \cdot y, y) =$

читаем ответ: -8.

Если в качестве начального значения возьмем  $y := -2$ , то получим ответ: 0.

Пример 10. Решите систему уравнений:

$$x^2 + y + 8 = x \cdot y$$

$$y - 2 \cdot x = 0.$$

Решение. Набираем ключевое слово given и систему уравнений

$$x^2 + y + 8 = x \cdot y$$

$$y - 2 \cdot x = 0.$$

Между левыми и правыми частями уравнений ставим знак логическое равно  $=$ . Набираем вызов функции  $\text{find}(x, y) \rightarrow$ , читаем на экране ответ:

-2 4  
-4 8

Пример 11. а) Решите неравенство:  $5 \cdot x - 3 \leq 4$ .

Решение. На экране набираем неравенство и входим в палитру “Символические операторы”, активизируем “solve”, набираем  $x$

$$5 \cdot x - 3 \leq 4 \text{ solve, } x \rightarrow$$

на экране читаем ответ:  $x \leq 7/5$ .

б) Решите неравенство:  $2 \cdot a^2 - 5 < 15$ .

На экране набираем неравенство и входим в палитру “Символические операторы”, активизируем “solve”, набираем  $a$

$$2 \cdot a^2 - 5 < 15 \text{ solve, } a \rightarrow$$

на экране читаем ответ:  $(-\sqrt{10} < a) \cdot (a < \sqrt{10})$ .

Пример 12. Вычислите:  $\cos 34^\circ \cdot \cos 56^\circ - \sin 34^\circ \cdot \sin 124^\circ$ .

Решение. Набираем на экране

$$\cos(34 \cdot \text{deg}) \cdot \cos(56 \cdot \text{deg}) - \sin(34 \cdot \text{deg}) \cdot \sin(124 \cdot \text{deg}) =$$

и читаем ответ: 0.

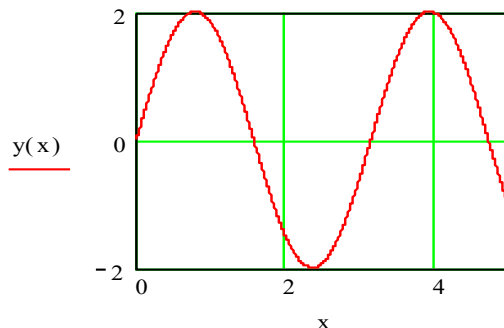
Примечание. Набираем deg, если угол задан в градусах; rad – в радианах.

Пример 13. Построить график функции  $y = 2 \cdot \sin 2 \cdot x$ .

Решение. Набираем на экране  $y(x) := 2 \cdot \sin(2 \cdot x)$ . Отводим указатель мыши от выделенной части и щелкаем левой кнопкой мышки. Указатель мыши

подводим к “Построение графиков” и входим, активизируем “Декартов график”. Появляется шаблон для построения графика. На ней выделены метки. Указатель мыши подводим к нижней метке, активизируем. Набираем

$$y(x) := 2 \cdot \sin(2 \cdot x)$$



х. Появляются по горизонтали еще две метки, где мы должны указать интервалы построения графика. Указатель мыши подводим к левой метке, щелкая левой кнопкой мыши активизируем и вводим левую границу 0. Указатель мыши подводим к правой границе, активизируем и вводим 5. Уводим указатель мыши к метке оси Y, активизируем его и вводим  $y(x)$ . Появляются метки нижней и верхней границ оси Y. В нижней набираем  $-2$ , в верхней  $2$ . Отводим указатель мыши от шаблона для графиков, щелкаем левой кнопкой мыши. Появляется искомый график. Для форматирования графика нужно дважды щелкнуть в области графика. В выпавшем меню можно управлять отображением линий, масштабом и др.

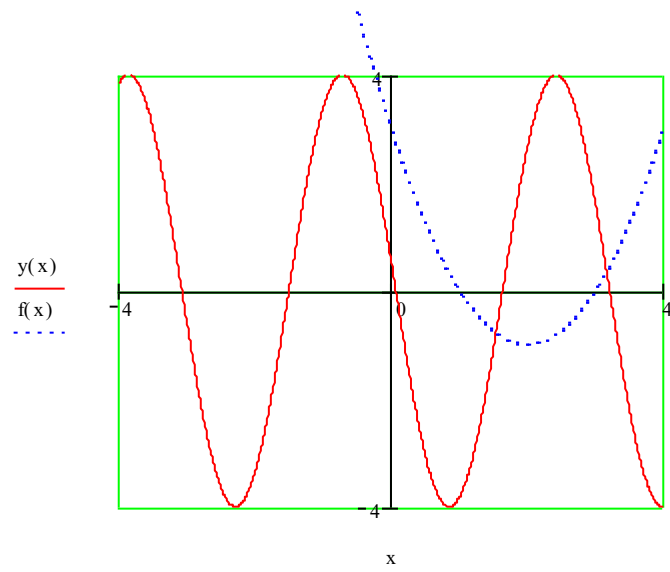
Пример 14. Построить графики функций:

$$y(x)=4\sin(2x+3) \text{ и } f(x)=x^2-4x+3.$$

Решение. Решение аналогично предыдущему примеру. В шаблоне для построения графиков имена функций набираем через запятую. Ограничений для значений аргументов и функций не ставим. Далее щелкаем мышью вне поля графиков.

$$y(x) := 4 \cdot \sin(2 \cdot x + 3)$$

$$f(x) := x^2 - 4 \cdot x + 3$$



Пример 15. Построить график функций  $z = \sin(x^2 + y^2)$  для  $x$  от  $-2$  до  $2$  и  $y$  от  $-2$  до  $2$ . Фрагмент выполнения задания приведен ниже.

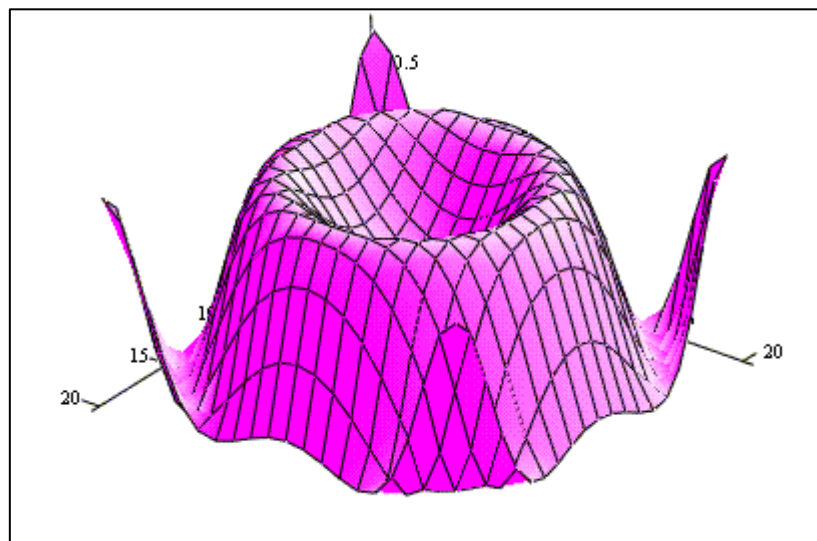
$$z(x, y) := \sin(x^2 + y^2)$$

$$n := 20 \quad i := 0..n \quad j := 0..n$$

$$a := -2 \quad b := 2 \quad x_0 := a \quad x_i := x_0 + \frac{i \cdot (b - a)}{n}$$

$$c := -2 \quad d := 2 \quad y_0 := c \quad y_j := y_0 + j \cdot \frac{(d - c)}{n}$$

$$Z_{i,j} := z(x_i, y_j)$$



Z

Пример 16. Вычислите предел многочлена:  $2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 3$ .

Решение. Из палитры “Высшей математики”, активизируем  $\lim$ , заполняем выведенный шаблон; завешаем набор знаком  $\rightarrow$  палитры “Операторы отношений”. На экране читаем ответ: 7.

Пример 17. Вычислите производную:  $\cos x + x \cdot \sin x$ .

Решение. Из палитры “Высшей математики”, активизируем  $\frac{d}{dx}$ , заполняем выведенный шаблон; завешаем набор знаком  $\rightarrow$  палитры “Операторы отношений”. На экране читаем ответ:  $x \cdot \cos(x)$ .

Пример 18. Вычислите неопределенный интеграл:  $\int (x^2 + \cos x) dx$ .



Решение. Из палитры “Высшей математики”, активизируем  $\int$  заполняем выведенный шаблон; завешаем набор знаком  $\rightarrow$  палитры “Операторы отношений”. На экране читаем ответ:  $\frac{1}{3} x^3 + \sin(x)$

Пример 19. Вычислите определенный интеграл:  $\int_0^1 \sqrt{x^2 + 1} dx$ .

Решение Из палитры “Высшей математики”, активизируем  $\int_a^b$ , заполняем выведенный шаблон; завешаем набор знаком  $\rightarrow$  палитры “Операторы отношений”. На экране читаем ответ:  $\frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1)$ .

### Задача №1

#### Тема: РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0 \quad (1.1)$$

где  $f(x)$  определена и непрерывна на некотором конечном или бесконечном интервале  $a < x < b$ .

Всякое значение  $x^*$ , обращающее функцию  $f(x)$  в нуль,  $f(x^*) \equiv 0$ , называется корнем уравнения (1.1), а способ нахождения этого значения  $x^*$  и есть решение уравнения (1.1).

Найти корни уравнения вида (1.1) точно удастся лишь в редких случаях. Кроме того, часто уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно и следовательно, сама задача о точном определении корней уравнения теряет смысл. Разработаны методы численного решения уравнений вида (1.1), позволяющие отыскать приближенные значения корней этого уравнения.

При этом приходится решать две задачи:

- 1) отделение корней, т. е. отыскание достаточно малых областей, в каждой из которых заключен только один корень уравнения;
- 2) вычисление корней с заданной точностью.

Воспользуемся известным результатом математического анализа: если непрерывная функция принимает на концах некоторого интервала значения разных знаков, то интервал содержит по крайней мере один корень уравнения.

Для выделения областей, содержащих один корень, можно использовать, например, графический способ, либо двигаясь вдоль области определения с некоторым шагом, проверять на концах интервалов условие смены знака функции.

Для решения второй задачи существует многочисленные методы, из которых рассмотрим четыре: метод итераций, метод половинного деления, метод хорд, метод касательных.

### Задание 1

Сделать отделение корней: графически и по программе (точность  $\varepsilon = 10^{-1}$ ). Индивидуальные задания приведены в таблице 1.

### Задание 2

1. Провести уточнение корней методом половинного деления.

В качестве начального приближения выберем  $c = (a + b)/2$ , затем исследуем функцию на концах отрезков  $[a, c]$  и  $[c, b]$ . Выбирается тот отрезок, у которого значение функции на концах имеет противоположные знаки. Процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие  $|b - a| < \varepsilon$ . Точность  $\varepsilon$  принять равной  $10^{-3}$ .

2. Сделать уточнение корней методом простой итерации.

Пусть корни отделены и  $[a, b]$  содержит единственный корень. Уравнение (1.1) приведем к итерационному виду:

$$x = \varphi(x) \quad (1.2)$$

где функция  $\varphi(x)$  дифференцируема на  $[a, b]$  и для любого  $x \in [a, b]$   $|\varphi'(x)| < 1$ . Функцию  $\varphi(x)$  можно подобрать в виде

$$\varphi(x) = x + kf(x), \quad (1.3)$$

где  $k$  находится из условия  $|\varphi'(k, x)| = |1 + kf'(x)| < 1$ , для  $\forall x \in [a, b]$ .

Последнее условие гарантирует сходимость итерационной последовательности  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \dots$  к корню  $\zeta$ . Условием окончания счета будем считать выполнение неравенства

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\varepsilon(1-q)}{q}; \quad q = \max |\varphi'(x)| \quad (1.4)$$

3. Сделать уточнение корней методом хорд или касательных (Х, К в таблице 1) с заданной точностью  $\varepsilon = 10^{-4}$ .

Расчетная формула для метода хорд:

$$x_{n+1} = \frac{x_0 f(x_n) - x_n f(x_0)}{(f(x_n) - f(x_0))},$$

для метода касательных:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

Значение  $x_0$  для метода хорд и начальная точка для метода касательных выбирается из условия выполнения неравенства  $f(x_0)f''(x_0) > 0$ .

В результате вычислений по этим формулам может быть получена последовательность приближенных значений корня  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \dots$ . Процесс вычислений заканчивается при выполнении условия  $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$  (

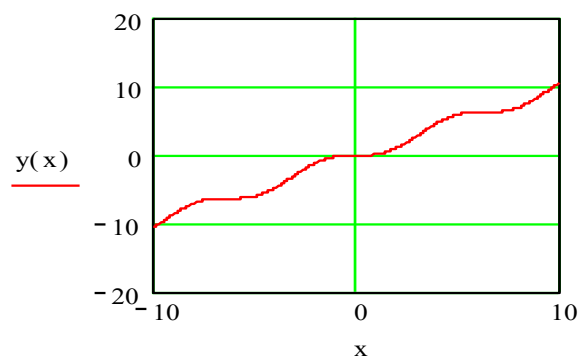
$\varepsilon = 10^{-5}$ ). В каждом случае вывести на печать количество итераций, необходимых для достижения заданной точности.

## ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ НА MATHCAD

1. Определение, построение таблиц значений и графиков функций и отделение корней уравнения  $y = x - \sin x - 0,25$ .

Отделяем корни графически.

$$y(x) := x - \sin(x) - 0.25$$



Вычисляем значения аргумента и функции.

$$i := 0..10$$

$$x_i := -5 + i$$

$$F_i := y(x_i)$$

	0
0	-5
1	-4
2	-3
3	-2
4	-1
5	0
6	1
7	2
8	3
9	4
10	5

x =

	0
0	-6.209
1	-5.007
2	-3.109
3	-1.341
4	-0.409
5	-0.25
6	-0.091
7	0.841
8	2.609
9	4.507
10	5.709

F =

Набираем  $i$ ,  $x_i$   $F_i$ . Ниже,  $x =$  и рядом щелкаем мышью, набираем  $F =$ , также рядом щелкаем мышью.

2. Решение с использованием операторов given, find.

Given

$$x - \sin(x) - 0.25 = 0$$

$$\text{Find}(x) \rightarrow 1.1712296525016659939$$

### 3. Символьное решение.

$$x - \sin(x) - 0.25 \text{ solve } , x \rightarrow 1.1712296525016659939$$

### 4. Слева решение методом итераций, посередине методом касательных, справа методом хорд.

$$\begin{array}{lll}
 i := 0..10 & i := 0..10 & i := 0..10 \\
 x_0 := 1 & x_0 := 1 & x_0 := 1 \\
 x_{i+1} := \sin(x_i) + 0.25 & x_{i+1} := x_i - \frac{x_i - (\sin(x_i) + 0.25)}{1 + \cos(x_i)} & x_{i+1} := \frac{x_0 \cdot (x_i - \sin(x_i) - 0.25) - x_i \cdot (x_0 - \sin(x_0) - 0.25)}{(x_i - \sin(x_i) - 0.25) - (x_0 - \sin(x_0) - 0.25)}
 \end{array}$$

 $x =$ 

	0
0	1
1	1.091471
2	1.137306
3	1.157505
4	1.165804
5	1.169105
6	1.170401
7	1.170907
8	1.171104
9	1.171181
10	1.171211
11	1.171222

 $x =$ 

	0
0	1
1	1.059385
2	1.101462
3	1.129285
4	1.146678
5	1.157108
6	1.163197
7	1.16669
8	1.168674
9	1.169794
10	1.170424
11	1.170778

 $x =$ 

	0
0	1
1	0
2	1.576998
3	1.126117
4	1.177917
5	1.170273
6	1.171367
7	1.17121
8	1.171232
9	1.171229
10	1.17123
11	1.17123

Таблица 1

N	Метод	Уравнение
1	К	$x + x \ln(x + 0.5) - 0.5 = 0$
2	К	$x2^x - 1 = 0$
3	X	$x^3 - 2x^2 + x - 3 = 0$
4	К	$x^3 + 12x - 2 = 0$
5	X	$5x - 8 \ln(x) - 8 = 0$
6	К	$x^4 + 0.5x^3 - 4x^2 - 3x - 0.5 = 0$
7	X	$x - \sin(x) - 0.25 = 0$
8	К	$x^3 - 6x^2 + 20 = 0$
9	X	$5x^3 + 10x^2 + 5x - 1 = 0$
10	К	$0.1x^2 - x \ln(x) = 0$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Этапы решения уравнения с одной неизвестной.
2. Способы отделения корней.
3. Каким образом графическое отделение корней уточняется с помощью вычислений?
4. Дать словесное описание алгоритма метода половинного деления.
5. Необходимые условия сходимости метода половинного деления.
6. Условие окончания счета метода простой итерации. Погрешность метода.
7. Словесное описание алгоритма метода хорд. Графическое представление метода. Вычисление погрешности.
8. Словесное описание алгоритма метода касательных (Ньютона). Графическое представление метода. Условие выбора начальной точки.

### Задача №2

#### Тема: РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методы решения систем линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.1)$$

или в векторном виде

$$Ax = b \quad (2.2)$$

можно разделить на две основные группы: прямые методы и итерационные. Прямые методы дают точное решение за конечное число операций; к ним относятся, например, методы Крамера и Гаусса. Итерационные методы дают решение системы уравнений как предел последовательных приближений. Для итерационных методов необходимо выполнение условий сходимости и дополнительных преобразований системы в эквивалентную ей.

### Задание 1

1. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса. Задания приведены в таблице 2.

Комментарий. Контроль выполняемых вычислений является важным элементом решения любой вычислительной задачи. Для контроля прямого хода пользуются контрольными суммами, которые представляют собой суммы коэффициентов при неизвестных и свободного члена для каждого уравнения заданной системы.

Для контроля вычислений в основной части схемы единственного деления (столбцы коэффициентов при неизвестных и свободных членов) над контрольными суммами выполняют те же действия, что и над остальными элементами той же строки. При отсутствии вычислительных ошибок контрольная сумма для каждой строки в пределах влияний погрешностей округления и их накопления должна совпадать со строчной суммой - вторым столбцом контроля. Строчные суммы представляют собой суммы всех элементов из основной части этой строки.

## Задание 2

Решить систему (2.1) методом простой итерации. Предполагается в дальнейшем, что матрица  $A$  квадратная и невырожденная.

Предварительно приведем систему (2.2) к итерационному виду:

$$x = Cx + f \quad (2.3)$$

Для произвольного начального вектора  $x_0$  итерационный процесс

$$x^{n+1} = Cx^n + f$$

сходится, если выполнено одно из условий [2]

$$а) \sum_{j=1}^n |c_{i,j}| = \alpha < 1, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.4)$$

$$б) \sum_{i=1}^n |c_{i,j}| = \alpha < 1, \quad 1 \leq j \leq n, \quad (2.5)$$

$$в) \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij}^2} = \alpha < 1. \quad (2.6)$$

Процесс вычислений заканчиваем при выполнении условия

$$\rho_i(x^{k-1}, x^k) \leq \varepsilon(1 - \alpha) / \alpha \quad (2.7)$$

где  $\rho_i$  ( $i=1,2,3$ ) – одна из метрик, определяемая левой частью (2.4)-(2.6), по которой была установлена сходимость,  $\varepsilon$  – заданная точность ( $\varepsilon = 10^{-4}$ ).

## Задание 3

Решить систему (2.1) методом Зейделя.

Метод Зейделя отличается от метода простой итерации тем, что найдя какое-то значение для компоненты, мы на следующем шаге используем его для отыскания следующей компоненты. Вычисления ведутся по формуле

$$x_i^{(k+1)} = - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}. \quad (2.8)$$

Каждое из условий (2.4)-(2.6) является достаточным для сходимости итерационного процесса по методу Зейделя. Практически же удобнее следующее преобразование системы (2.2). Домножая обе части (2.2) на  $A^T$ , получим эквивалентную ей систему

$$CX = d,$$

где  $C = A^T A$  и  $d = A^T b$ . Далее, поделив каждое уравнение на  $c_{ii}$ , приведем систему к виду (2.8). Подобное преобразование также гарантирует сходимость итерационного процесса.

## ПРИМЕРНЫЙ ВАРИАНТ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Пример. Решите систему уравнений

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 7,$$

$$X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 5,$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 3.$$

### 1. Символьное решение систем уравнений

Фрагмент рабочего документа с соответствующими вычислениями приведен ниже. Здесь  $=$  - логическое равенство.

Given

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 7$$

$$x_1 - 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 5$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$\text{Find}(x_1, x_2, x_3) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

### 2. Решение системы линейных алгебраических уравнений как матричное уравнение $Ax=b$

Порядок выполнения задания.

1. Установите режим автоматических вычислений.
2. Введите матрицу системы и матрицу-столбец правых частей.
3. Вычислите решение системы по формуле  $x = A^{-1}b$ .
4. Проверьте правильность решения умножением матрицы системы на вектор-столбец решения.
5. Найдите решение системы с помощью функции `lsolve` и сравните результаты.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$x := A^{-1} \cdot b \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad A \cdot x - b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Решим систему с помощью функции `lsolve` и сравним результат с решением  $x=A^{-1}b$ .

$$x := \text{lsolve}(A, b) \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

### 3. Решение линейной системы методом Гаусса

Комментарии. Функция `augment(A,b)` формирует расширенную матрицу системы добавлением к матрице системы справа столбца правых частей. Функция `rref` приводит расширенную матрицу системы к ступенчатому виду, выполняя прямой и обратный ходы гауссова исключения. Последний столбец содержит решение системы.

$$\text{rref}(\text{augment}(A, b)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \blacksquare$$

### 4. Решение системы методом Крамера

Порядок выполнения работы.



1. Вычисляем D определитель матрицы A.
2. Зададим матрицу DX1, заменой первого столбца матрицы A, матрицей b. Вычисляем определитель матрицы DX1.
3. Зададим матрицу DX2, заменой второго столбца матрицы A, матрицей b. Вычисляем определитель матрицы DX2.
4. Зададим матрицу DX3, заменой третьего столбца матрицы A, матрицей b. Вычисляем определитель матрицы DX3.
5. Определяем решение системы линейных уравнений  $x_1, x_2, x_3$ .

$$D := | A | \quad D = 9$$

$$DX1 := \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad DX1 := | DX1 | \quad DX1 = 9$$

$$DX2 := \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad DX2 := | DX2 | \quad DX2 = 0$$

$$DX3 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad DX3 := | DX3 | \quad DX3 = 18$$

$$x1 := \frac{DX1}{D} \quad x1 = 1 \quad x2 := \frac{DX2}{D} \quad x2 = 0 \quad x3 := \frac{DX3}{D} \quad x3 = 2$$

## 5. Решение системы линейных алгебраических уравнение методом простых итераций

Порядок выполнения задания

1. Введите матрицы C и d.
2. Преобразуйте исходную систему  $Cx=d$  к виду  $x=b+Ax$ .
3. Определите нулевое приближение решения.
4. Задайте количество итераций.
5. Вычислите последовательные приближения.

ORIGIN := 1

$$C := \begin{bmatrix} 100 & 6 & -2 \\ 6 & 200 & -10 \\ 1 & 2 & 100 \end{bmatrix} \quad d := \begin{bmatrix} 200 \\ 600 \\ 500 \end{bmatrix}$$

i := 1..3    j := 1..3

$$b_i := \frac{d_i}{C_{i,i}} \quad A_{i,j} := \frac{-C_{i,j}}{C_{i,i}} \quad A_{i,i} := 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x^{<1>} := b \quad k := 2..10 \quad x^{<k>} := b + A \cdot x^{<k-1>}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x =	1	2	1.92	1.907	1.907	1.907	1.907	1.907	1.907	1.907
	2	3	3.19	3.188	3.189	3.189	3.189	3.189	3.189	3.189
	3	5	4.92	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917

$$X := x^{<10>} \quad X = \begin{bmatrix} 1.907 \\ 3.189 \\ 4.917 \end{bmatrix}$$

## 6.Решение системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя

Порядок выполнения задания

1. Введите матрицы C и d.
2. Преобразуйте систему  $Cx=d$  к виду  $x=b+A_1x+A_2x$ .
3. Определите нулевое приближение решения.
4. Задайте количество итераций.
5. Вычислите последовательные приближения.

ORIGIN := 1

$$C := \begin{bmatrix} 100 & 6 & -2 \\ 6 & 200 & -10 \\ 1 & 2 & 100 \end{bmatrix} \quad d := \begin{bmatrix} 200 \\ 600 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$i := 1..3 \quad b_i := \frac{d_i}{C_{i,i}} \quad i := 2..3 \quad j := 1..2$$

$$A1_{i,j} := \frac{-C_{i,j}}{C_{i,i}} \quad A2_{j,i} := \frac{-C_{j,i}}{C_{j,j}}$$

$$A1_{i,i} := 0 \quad A1_{j,i} := 0 \quad A2_{i,i} := 0 \quad A2_{i,j} := 0 \quad A := A1 + A2$$

$$A1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0.03 & 0 & 0 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{bmatrix} \quad A2 = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ 0 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$x^{<1>} := b \quad y^{<1>} := b \quad k := 2..10$$

$$x^{<k>} := b + A2 \cdot x^{<k-1>} \quad x^{<k>} := x^{<k>} + A1 \cdot x^{<k-1>}$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x =	2	1.92	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905	1.905
	3	3.19	3.192	3.193	3.193	3.193	3.193	3.193	3.193	3.193
	5	4.92	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917	4.917

Таблица 2

№ вар.	$a_{1i}$	$a_{2i}$	$a_{3i}$	$b_{1i}$
1	0.35	0.12	- 0.13	0.10
	0.12	0.71	0.15	0.26
	- 0.13	0.15	0.63	0.38
2	0.71	0.10	0.12	0.29
	0.10	0.34	- 0.04	0.32
	- 0.10	0.64	0.56	- 0.10
3	0.34	- 0.04	0.10	0.33
	- 0.04	0.44	- 0.12	- 0.05
	0.06	0.56	0.39	0.28
4	0.10	- 0.04	- 0.63	- 0.15
	- 0.04	0.34	0.05	0.31
	- 0.43	0.05	0.13	0.37

5	0.63	0.05	0.15	0.34
	0.05	0.34	0.10	0.32
	0.15	0.10	0.71	0.42
6	1.20	- 0.20	0.30	- 0.60
	- 0.50	1.70	- 1.60	0.30
	- 0.30	0.10	- 1.50	0.40
7	0.30	1.20	- 0.20	- 0.60
	- 0.10	- 0.20	1.60	0.30
	- 1.50	- 0.30	0.10	0.70
8	0.20	0.44	0.91	0.74
	0.58	- 0.29	0.05	0.02
	0.05	0.34	0.10	0.32
9	6.36	1.75	1.0	41.70
	7.42	19.03	1.75	49.49
	1.77	0.42	6.36	27.67
10	3.11	- 1.66	- 0.60	- 0.92
	- 1.65	3.15	- 0.78	2.57
	0.60	0.78	- 2.97	1.65

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. К какому типу - прямому или итерационному - относится метод Гаусса?
2. В чем заключается прямой и обратный ход в схеме единственного деления?
3. Как организуется, контроль над вычислениями в прямом и обратном ходе?
4. Как строится итерационная последовательность для нахождения решения системы линейных уравнений?
5. Как формулируются достаточные условия сходимости итерационного процесса?
6. Как эти условия связаны с выбором метрики пространства?
7. В чем отличие итерационного процесса метода Зейделя от аналогичного процесса метода простой итерации?

### Задача №3

### ТЕМА: ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Пусть функция  $f(x)$  задана таблично, либо вычисление ее требует громоздких выкладок. Заменим приближенно функцию  $f(x)$  на какую-либо функцию  $F(x)$ , так, чтобы отклонение  $f(x)$  от  $F(x)$  было в заданной области в некотором смысле минимальным. Подобная замена называется аппроксимацией функции  $f(x)$ , а функция  $F(x)$  – аппроксимирующей (приближающей) функцией.

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требовании строгого совпадения значений  $f(x)$  и  $F(x)$  в точках  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), т. е.

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (3.1)$$

В этом случае нахождение приближенной функции называют интерполяцией (или интерполированием), точки  $x_0, x_1, \dots, x_n$  — узлами интерполяции.

Часто интерполирование ведется для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента  $x$ . В этом случае шаг таблицы  $h = x_{i+1} - x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) является величиной постоянной. Для таких таблиц построение интерполяционных формул (как, впрочем, и вычисление по этим формулам) заметно упрощается.

### Задание 1

По заданной таблице значений функции составить формулу интерполяционного многочлена Лагранжа (3.2) и построить график  $L_2(x)$ . Исходные данные берутся из таблицы 3.1.

$$L_2(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (3.2)$$

Таблица 3.1.

№	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$y_0$	$y_1$	$y_2$
1	2	3	5	4	1	7
2	4	2	3	5	2	8
3	0	2	3	-1	-4	2
4	7	9	13	2	-2	3
5	-3	-1	3	7	-1	4
6	1	2	4	-3	-7	2
7	-2	-1	2	4	9	1
8	2	4	5	9	-3	6
9	-4	-2	0	2	8	5
10	-1	1.5	3	4	-7	1
11	2	4	7	-1	-6	3
12	-9	-7	-4	3	-3	4
13	0	1	4	7	-1	8
14	8	5	0	9	2	4
15	-7	-5	-4	4	-4	5

## Задание 2

Вычислить одно значение заданной функции для промежуточного значения аргумента ( $a$ ) с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа (3.3) и оценить погрешность интерполяции. Для выполнения задания исходные данные берутся из таблицы 3.2, 3.3 или 3.4.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (3.3)$$

Для погрешности  $R_n(x)$  выполняется неравенство

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\Pi_{n+1}(x)|, \quad x \in [x_0, x_n] \quad (3.4)$$

где  $M_{n+1} = \max |f^{(n+1)}(x)|$ .

Таблица 3.2

№ варианта	Значение а	№ таблицы
1	-2	3.3
2	3.77	3.4
3	0.55	3.3
4	4.83	3.4
5	3.5	3.3
6	5.1	3.4
7	1.75	3.3
8	4.2	3.4
9	-1.55	3.3
10	6.76	3.4

Таблица 3.3

$x$	-3.2	-0.8	0.4	2.8	4.0	6.4	7.6
$f(x) = 2.1 \sin(0.37x)$	-1.94	-0.61	0.31	1.81	2.09	1.47	0.68

Таблица 3.4

$x$	1.3	2.1	3.7	4.5	6.1	7.7	8.5
$f(x) = \lg(x)/x + x^2$	1.777	4.563	13.84	20.39	37.34	59.41	72.4

Таблица 3.5

$x$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
$f(x) = \cos(x)$	0.995	0.988	0.980	0.969	0.955	0.939	0.921

Таблица 3.6

$x$	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95
$f(x) = \sin(x)$	0.605	0.644	0.681	0.71	0.75	0.783	0.813

## Задание 3.

Уплотнить часть таблицы заданной на отрезке  $[a, b]$  функции, используя интерполяционный многочлен Ньютона (3.5) и оценить погрешность интерполяции  $D$  (формула (3.6)). Таблицу 3.7 конечных разностей просчитать вручную на отрезке  $[a, b]$  с шагом  $h$ . Для выполнения задания исходные данные берутся из таблиц 3.8, 3.5 и 3.6.

$$P_2(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0, \quad (3.5)$$

где  $t = \frac{x - x_0}{h}$ .

$$D \approx \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f'''(\xi), \quad (3.6)$$

где  $\xi$  – некоторая внутренняя точка наименьшего промежутка, содержащего все узлы  $x_i (i = \overline{0, n})$  и  $x$ .

Формула (3.5) называется первой интерполяционной формулой Ньютона. Если вычисляемое значение переменной ближе к концу отрезка  $[a; b]$ , то применяют вторую формулу Ньютона – интерполирование назад (формула (3.6)).

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y_{n-3} \quad (3.6)$$

где  $t = \frac{x - x_n}{h}$  и  $D = \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} f'''(\xi)$ .

Таблица 3.7

$x$	$y$	$\Delta y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
$x_0$	$y_0$	$\Delta y_0 = y_1 - y_0$	$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$	$\Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0$
$x_1 = x_0 + h$	$y_1$	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	
$x_2 = x_1 + h$	$y_2$	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$		
$x_3 = x_2 + h$	$y_3$			

Таблица 3.8

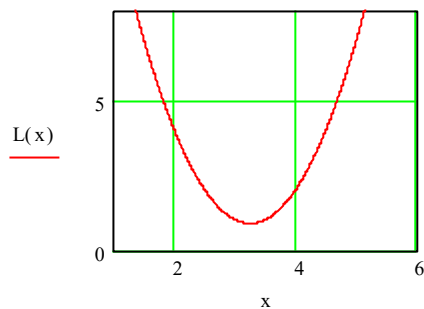
№	$a$	$b$	$h_0$	$h$	№ таблицы
1	0.65	0.80	0.05	0.01	3.6
2	0.25	0.40	0.05	0.025	3.5
3	0.75	0.90	0.05	0.01	3.6
4	0.70	0.85	0.05	0.025	3.6
5	0.80	0.95	0.05	0.025	3.6
6	0.1	0.25	0.05	0.025	3.5
7	0.15	0.3	0.05	0.025	3.5

8	0.7	0.85	0.05	0.025	3.6
9	0.2	0.35	0.05	0.01	3.5
10	0.80	0.95	0.05	0.01	3.6

### Примерный фрагмент выполнения работы

$x_0 := 2 \quad x_1 := 3 \quad x_2 := 5 \quad y_0 := 4 \quad y_1 := 1 \quad y_2 := 7$

$$L(x) := \left[ \frac{y_0 \cdot (x - x_1) \cdot ((x - x_2))}{(x_0 - x_1) \cdot (x_0 - x_2)} + \frac{y_1 \cdot (x - x_0) \cdot ((x - x_2))}{(x_1 - x_0) \cdot (x_1 - x_2)} + \frac{y_2 \cdot (x - x_0) \cdot ((x - x_1))}{(x_2 - x_0) \cdot (x_2 - x_1)} \right]$$



$x_0 := 2 \quad x_1 := 3 \quad x_2 := 5 \quad y_0 := 4 \quad y_1 := 1 \quad y_2 := 7$

$$L(x) := \left[ \frac{4 \cdot (x - 3) \cdot ((x - 5))}{(2 - 3) \cdot (2 - 5)} + \frac{1 \cdot (x - 2) \cdot ((x - 5))}{(3 - 2) \cdot (3 - 5)} + \frac{7 \cdot (x - 2) \cdot ((x - 3))}{(5 - 2) \cdot (5 - 3)} \right]$$

$$2 \cdot x^2 - 13 \cdot x + 22$$

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем особенность приближения таблично заданной функции методом интерполирования?
2. Как обосновывается существование и единственность интерполяционного многочлена?
3. Как связана степень интерполяционного многочлена с количеством узлов интерполяции?
4. Как строятся интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона?
5. В чем особенности этих двух способов интерполяции?
6. Как производится оценка погрешности метода интерполяции многочленом Лагранжа?
7. Как используется метод интерполирования для уточнения таблиц функций?



8. В чем отличие между первой и второй интерполяционными формулами Ньютона?

#### Задача №4

##### ТЕМА: ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Формулы, используемые для приближенного вычисления однократных интегралов, называют квадратурными формулами. Простой прием построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция  $f(x)$  заменяется на отрезке  $[a, b]$  интерполяционным многочленом, например, многочленом Лагранжа  $L_n(x)$ ; для интеграла имеем приближенное равенство (4.1). Предполагается, что отрезок  $[a, b]$  разбит на  $n$  частей точками (узлами)  $x_i$ , наличие которых подразумевается при построении многочлена  $L_n(x)$ . Для равноотстоящих узлов

$$x_i = x_0 + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_0 = a, \quad x_n = b.$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b L_n(x) dx \quad (4.1)$$

При определенных допущениях получаем формулу трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right), \quad (4.2)$$

где  $y_i$  – значения функции в узлах интерполяции.

Имеем следующую оценку погрешности метода интегрирования по формуле трапеций (4.2):

$$|R_n| \leq M \frac{|b-a| \cdot h^2}{12}, \quad \text{где } M = \max |f^{(2)}(x)|, \quad x \in [a, b]. \quad (4.3)$$

Во многих случаях более точной оказывается формула Симпсона (формула парабол):

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{2h}{3} \left( \frac{y_0 + y_{2m}}{2} + 2y_1 + y_2 + \dots + 2y_{2m-1} \right). \quad (4.4)$$

Для формулы Симпсона имеем следующую оценку погрешности:

$$|R_n| \leq M \frac{|b-a| \cdot h^4}{180}, \quad \text{где } M = \max |f^{(4)}(x)|, \quad x \in [a, b].$$

#### Задание 1

Составить программу вычисления интеграла от заданной функции на отрезке  $[a, b]$  по формуле трапеций с шагом  $h=0.1$  и  $h=0.05$ . Сравнить результаты. Оценить точность по формуле (4.3). Сравнить результаты. Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 4.

## Задание 2

Составить программу вычисления интеграла от заданной функции на отрезке  $[a, b]$  по формуле Симпсона методом повторного счета с точностью  $\varepsilon = 10^{-6}$ . Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 4.

### ПРИМЕРНЫЙ ФРАГМЕНТ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Вычислить интеграл от заданной функции на отрезке  $[a, b]$  по формуле трапеций и прямым способом.

$$\begin{aligned} a &:= 0 & b &:= 1 & n &:= 10 & h &:= \frac{(b-a)}{n} \\ i &:= 0..10 & x_0 &:= a & x_i &:= x_0 + i \cdot h \\ y &:= 0.37 \cdot e^{\sin(x)} \end{aligned}$$

$$s := h \cdot \left( \sum_{i=1}^{n-1} y_i + \frac{y_0 + y_n}{2} \right)$$

$$s = 0.604$$

$$\int_0^1 0.37 e^{\sin(x)} dx = 0.604$$

Таблица 4

N	Функция	$a$	$b$
1	$0.37e^{\sin x}$	0	1
2	$0.5x + x \ln x$	1	2
3	$(x+1.9)\sin(x/3)$	1	2
4	$\frac{1}{x} \ln(x+2)$	2	3
5	$\frac{3 \cos x}{2x+1.7}$	0	1

6	$(2x + 0.6) \cos(x/2)$	1	2
7	$2.6x^2 \ln x$	1.2	2.2
8	$(x^2 + 1) \sin(x - 0.5)$	1	2
9	$x^2 \cos(x/4)$	2	3
10	$\frac{\sin(0.2x - 3)}{x^2 + 1}$	3	4

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы преимущества формулы парабол по сравнению с формулой трапеций и следствием чего являются эти преимущества?
2. Верны ли формулы (4.2), (4.4) для неравноотстоящих узлов?
3. В каких случаях приближенные формулы трапеций и парабол оказываются точными?
4. Как влияет на точность численного интегрирования величина шага?
5. Каким способом можно прогнозировать примерную величину шага для достижения заданной точности интегрирования?
6. Можно ли добиться неограниченного уменьшения погрешности интегрирования путем последовательного уменьшения шага?

### Задача №5

#### ТЕМА: ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y). \quad (5.1)$$

Требуется найти на отрезке  $[a, b]$  решение  $y(x)$ , удовлетворяющее начальному условию

$$y(a) = y_0 \quad (5.2)$$

Будем предполагать, что условия теоремы существования и единственности выполнены. Для решения используем метод Эйлера (метод первого порядка точности, расчетные формулы (5.3)) и метод Рунге-Кутты (метод четвертого порядка точности, расчетные формулы (5.4)) с шагом  $h$  и  $2h$ . Отметим, что результаты могут сильно отличаться, ввиду того, что метод Эйлера, имея только первый порядок точности, используется, как правило, для оценочных расчетов. Ориентировочную оценку погрешности метода Рунге-Кутты  $\varepsilon$  вычислить по формуле (5.5) [2].

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad \text{где } h - \text{ шаг разбиения.} \quad (5.3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}, \quad \text{где} \quad (5.4)$$

$$k_1 = hf(x_i, y_i), \quad k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}), \quad k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}),$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3).$$

$$\varepsilon = \frac{|y_{2h} - y_h|}{15} \quad (5.5)$$

#### Задание 1

Написать программу решения дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  методом Эйлера на отрезке  $[a, b]$  с шагом  $h$  и  $2h$  и начальным условием  $y(a) = y_0$ . Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 5. Сравнить результаты.

#### Задание 2

Написать программу решения дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$  методом Рунге-Кутты на отрезке  $[a, b]$  с шагом  $h$  и  $2h$  и начальным условием  $y(a) = y_0$ . Оценить погрешность по формуле (5.5). Исходные данные для выполнения задания берутся из таблицы 5.

#### ПРИМЕРНЫЙ ФРАГМЕНТ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Решить дифференциальное уравнение  $y' = f(x, y)$  методом Эйлера на отрезке  $[a, b]$  с шагом  $h$  с начальным условием  $y(a) = y_0$ ,  $f(x, y) = (3x - y)/(x^2 + y)$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $h = 0.1$ ,  $y_0 = 1$ .

$a := 2$        $b := 3$        $x_0 := a$

$i := 0..10$        $h := 0.1$        $x_{i+1} := x_0 + i \cdot h$        $y_0 := 1$

$$y_{i+1} := y_i + h \cdot \frac{3 \cdot x_i - y_i}{(x_i)^2 + y_i}$$

 $x =$ 

	0
0	2
1	2
2	2.1
3	2.2
4	2.3
5	2.4
6	2.5
7	2.6
8	2.7
9	2.8
10	2.9
11	3

 $y =$ 

	0
0	1
1	1.1
2	1.196
3	1.287
4	1.374
5	1.457
6	1.536
7	1.613
8	1.687
9	1.758
10	1.827
11	1.895

2. Решить дифференциальное уравнение  $y' = f(x, y)$  методом Рунге-Кутты на отрезке  $[a, b]$  с шагом  $h$  с начальным условием  $y(a) = y_0$ .

$$a := 2 \quad b := 3 \quad x_0 := a$$

$$i := 0..10 \quad h := 0.1 \quad x_{i+1} := x_0 + i \cdot h \quad y_0 := 1$$

$$f(x, y) := \frac{3 \cdot x - y}{x^2 + y} \quad y_{i+1} := y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$$

$$k_1 := h \cdot f(x_i, y_i) \quad k_2 := h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 := h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right) \quad k_4 := h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} := y_i + \frac{k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4}{6}$$

 $x =$ 

	0
0	2
1	2
2	2.1
3	2.2
4	2.3
5	2.4
6	2.5
7	2.6
8	2.7
9	2.8
10	2.9
11	3

 $y =$ 

	0
0	1
1	1.066
2	1.132
3	1.199
4	1.265
5	1.331
6	1.397
7	1.463
8	1.529
9	1.596
10	1.662
11	1.728

Таблица 5

N	Функция	$a$	$b$	$y_0$	$h$
1	$\frac{3x - y}{x^2 + y}$	2	3	1	0.1
2	$\frac{2x + y + 4}{2y + x}$	3	4	1	0.1
3	$\frac{x^2 - y}{2x + y + 1}$	0	1	2	0.1
4	$\frac{x^2 - y + 2}{xy + 3x}$	2	3	1	0.1

5	$\frac{3-x-y^2}{2-xy^2}$	1	2	1	0.1
6	$\frac{2-x-y^2x}{3x+y}$	0	1	1	0.1
7	$\frac{1+3xy}{5-x+y^2}$	0	1	2	0.1
8	$\frac{x^2y+2}{2x-y}$	0	1	1	0.1
9	$\frac{x^2+y+2}{2x-y}$	2	3	2	0.1
10	$\frac{xy+4}{2y-xy+1}$	0	1	3	0.1

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Проверить для дифференциального уравнения условия теоремы существования и единственности.
2. На какие основные группы подразделяются приближенные методы решения дифференциальных уравнений?
3. В какой форме можно получить решение дифференциального уравнения по методу Эйлера?
4. Каков геометрический смысл решения дифференциального уравнения методом Эйлера?
5. В какой форме можно получить решение дифференциального уравнения по методу Рунге-Кутты?
6. Какой способ оценки точности используется при приближенном интегрировании дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге-Кутты?
7. Как вычислить погрешность по заданной формуле, используя метод двойного пересчета?

### Задача №6

### ТЕМА: СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ОПЫТНЫХ ДАННЫХ

Пусть зависимость между переменными  $x$  и  $y$  задана таблично (заданы опытные данные). Требуется найти функцию в некотором смысле наилучшим образом описывающую данные. Одним из способов подбора такой (приближающей) функции является метод наименьших квадратов. Метод состоит в том, чтобы сумма квадратов отклонений значений искомой функции  $\bar{y}_i = \bar{y}(x_i)$  и заданной таблично  $y_i$  была наименьшей:

$$S(c) = (y_1 - \bar{y}_1)^2 + (y_2 - \bar{y}_2)^2 + \dots + (y_n - \bar{y}_n)^2 \rightarrow \min \quad (6.1)$$

где  $c$  – вектор параметров искомой функции.

### Задание 1

Построить методом наименьших квадратов две эмпирические формулы: линейную и квадратичную.

В случае линейной функции  $y = ax + b$  задача сводится нахождению параметров  $a$  и  $b$  из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} M_{x^2}a + M_xb = M_{xy} \\ M_xa + b = M_y \end{cases}, \text{ где}$$

$$M_{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad M_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad M_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad M_y = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

а в случае квадратичной зависимости  $y = ax^2 + bx + c$  к нахождению параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$  из системы уравнений:

$$\begin{cases} M_{x^4}a + M_{x^3}b + M_{x^2}c = M_{x^2y} \\ M_{x^3}a + M_{x^2}b + M_xc = M_{xy} \\ M_{x^2}a + M_xb + c = M_y \end{cases}, \text{ где}$$

$$M_{x^4} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^4, \quad M_{x^3} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^3, \quad M_{x^2y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i$$

Выбрать из двух функций наиболее подходящую. Для этого составить таблицу для подсчета суммы квадратов отклонений по формуле (6.1). Исходные данные взять из таблицы 6.

### Задание 2

Составить программу для нахождения приближающих функций заданного типа с выводом значений их параметров и соответствующих им сумм квадратов отклонений. Выбрать в качестве приближающих функций следующие:  $y = ax + b$ ,  $y = ax^m$ ,  $y = ae^{mx}$ . Провести линеаризацию. Определить для какого вида функции сумма квадратов отклонений является наименьшей.

Исходные данные помещены в таблице 6.

Примерный фрагмент выполнения работы



---

$i := 1..10$	$y_1 := 1.8$
$x_1 := 0.5$	$y_2 := 1.1$
$x_2 := 0.1$	$y_3 := 1.8$
$x_3 := 0.4$	$y_4 := 1.4$
$x_4 := 0.2$	$y_5 := 2.1$
$x_5 := 0.6$	$y_6 := 1.8$
$x_6 := 0.3$	$y_7 := 1.6$
$x_7 := 0.4$	$y_8 := 2.2$
$x_8 := 0.7$	$y_9 := 1.5$
$x_9 := 0.3$	$y_{10} := 2.3$

$$x_{10} := 0.8 \left[ \frac{\sum_{i=1}^{10} (x_i)^2}{10} \right] \quad mx := 1 \cdot \left( \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} \right) \quad mxy := 1 \left( \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \cdot y_i}{10} \right) \quad my := 1 \left( \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} \right)$$

$$mx2 = 0.229$$

$$mx = 0.43$$

$$mxy = 0.828$$

$$my = 1.76$$

given

$$mx2 \cdot a + mx \cdot b = mxy$$

$$mx \cdot a + b = my$$

$$\text{find}(a, b) \rightarrow \begin{bmatrix} 1.6145124716553287982 \\ 1.0657596371882086168 \end{bmatrix}$$

Таблица 6

$i \backslash \text{№}$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	$x$	0.5	0.1	0.4	0.2	0.6	0.3	0.4	0.7	0.3	0.8
	$y$	1.8	1.1	1.8	1.4	2.1	1.8	1.6	2.2	1.5	2.3

2	$x$	1.7	1.5	3.7	1.1	6.2	0.3	6.5	3.6	3.8	5.9
	$y$	1.5	1.4	1.6	1.3	2.1	1.1	2.2	1.8	1.7	2.3
3	$x$	1.7	1.1	1.6	1.2	1.9	1.5	1.8	1.4	1.3	1.0
	$y$	6.7	5.6	6.7	6.1	7.4	6.9	7.9	5.9	5.6	5.3
4	$x$	1.3	1.2	1.5	1.4	1.9	1.1	2.0	1.6	1.7	1.8
	$y$	5.5	5.9	6.3	5.8	7.4	5.4	7.6	6.9	6.6	7.5
5	$x$	2.3	1.4	1.0	1.9	1.5	1.8	2.1	1.6	1.7	1.3
	$y$	5.3	3.9	2.9	5.0	4.0	4.9	5.1	4.5	4.1	3.7
6	$x$	1.8	2.6	2.3	1.3	2.0	2.1	1.1	1.9	1.6	1.5
	$y$	4.4	6.4	5.3	3.7	4.9	5.6	3.0	5.0	4.3	3.7
7	$x$	1.9	2.1	2.0	2.9	3.0	2.6	2.5	2.7	2.2	2.8
	$y$	6.6	7.6	6.7	9.2	9.4	7.8	8.4	8.0	7.9	8.7
8	$x$	2.0	1.4	1.0	1.7	1.3	1.6	1.9	1.5	1.2	2.1
	$y$	7.5	6.1	4.8	7.4	5.7	7.0	7.1	6.8	6.0	8.9
9	$x$	2.0	1.2	1.8	1.9	1.1	1.7	1.6	1.4	1.5	1.3
	$y$	7.5	5.9	7.0	8.0	5.0	7.4	6.4	6.6	6.3	5.7
10	$x$	1.9	1.1	1.4	2.3	1.7	2.1	1.6	1.5	1.0	1.2
	$y$	4.7	3.4	3.8	5.2	4.6	5.5	3.9	3.9	3.2	3.5

### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем суть приближения таблично заданной функции по методу наименьших квадратов?
2. Чем отличается этот метод от метода интерполяции?
3. Каким образом сводится задача построения приближающих функций в виде различных элементарных функций к случаю линейной функции?
4. Может ли сумма квадратов отклонений для каких-либо приближающих функций быть равной нулю?
5. Какие элементарные функции используются в качестве приближающих функций?
6. Как найти параметры для линейной и квадратичной зависимости, используя метод наименьших квадратов?

## Задача №7

Тема : Численное решение уравнений в частных производных

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения теплопроводности, а именно, найти функцию  $u(x, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (7.1)$$

начальному условию

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, s), \quad (7.2)$$

и краевым условиям

$$u(0, t) = \varphi(t), \quad u(l, t) = \psi(t), \quad t \in (0, T). \quad (7.3)$$

Задачу будем решать методом сеток (конечных разностей). В основе метода лежит идея замены производных конечно-разностными отношениями. Ограничимся случаем двух независимых переменных. Пусть в плоскости  $xOy$  имеется некоторая область  $G$  с границей  $\Gamma$  (рис. 1).

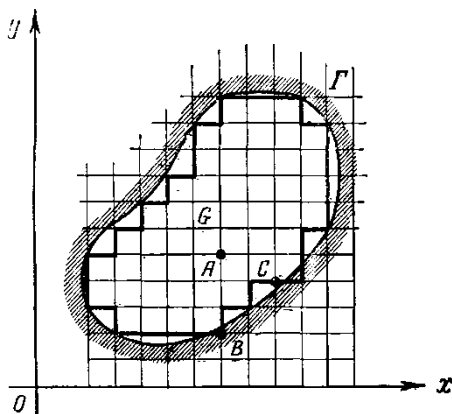


Рис 1

Построим на плоскости два семейства параллельных прямых:

$$x = ih, \quad t = kl, \quad i=0, 1, 2, \dots, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Точки пересечения этих прямых назовем узлами. Два узла называются соседними, если они удалены друг от друга в направлении оси  $Ox$  или  $Oy$  на расстояние, равное шагу сетки  $h$  или  $l$  соответственно. Выделим узлы, принадлежащие области  $G + \Gamma$ , а также некоторые узлы, не принадлежащие этой области, но расположенные на расстоянии, меньшем чем шаг, от границы  $\Gamma$ . Те узлы, у которых все четыре соседних узла принадлежат выделенному множеству узлов, называются внутренними (узел А, рис. 1). Оставшиеся из выделенных узлов называются граничными (узлы В, С). Обозначим  $x_i = ih, y_j = kl$ .

Значения искомой функции  $u = u(x, y)$  в узлах сетки будем обозначать через  $u_{i,k} = u(ih, kl)$ . В каждом внутреннем узле  $(ih, kl)$  заменим частные производные разностными отношениями:

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i-1,k}}{2h}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k-1}}{2l}$$

В граничных точках воспользуемся формулами вида

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1,k} - u_{i,k}}{h}, \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l}.$$

Аналогично заменяются частные производные второго порядка

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,k-1}}{l^2}$$

Сделаем переход от уравнения вида  $\frac{du}{dt} - \frac{d^2u}{dx^2} = 0$  к разностному уравнению

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{i,k}}{l} - \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2} = 0.$$

После замены  $\sigma = \frac{l}{h^2}$  и преобразований получаем уравнение для

вычисления внутренних узлов

$$u_{i,k+1} = (1 - 2\sigma)u_{ik} + \sigma(u_{i+1,k} + u_{i-1,k}) \quad (7.4)$$

При  $0 \leq \sigma \leq 1/2$  разностное уравнение (7.4) устойчиво [7]. Наиболее простой вид уравнение имеет при  $\sigma = 1/2$ . В этом случае уравнение (7.2) запишется в виде

$$u_{ik+1} = \frac{u_{i-1,k} + u_{i+1,k}}{2} \quad (7.5)$$

Пусть  $\bar{u}(x,t)$  – точное решение задачи (7.1)-(7.3),  $|\bar{u} - u|$  – отклонение точного значения от вычисленного по методу сеток. Тогда погрешность вычислений может быть вычислена по формуле

$$|\bar{u} - u| \leq \frac{T}{3} m_1 h^2, \quad (7.6)$$

где  $m_1 = \max \{ |f^{(4)}(x)|, |\varphi''(t)|, |\psi''(t)| \}$ , где  $0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq s$ .

### Задание 1

Используя метод сеток, найти приближенное решение уравнения (7.1)-(7.3), удовлетворяющее условиям  $u(x,0) = f(x)$ ,  $u(x_0,t) = 0$ ,  $u(x_n,t) = 0$ , для  $0 \leq t \leq 0.03$ ,  $x_0 \leq x \leq x_n$  и  $h=0.1, l=0.005$ .

Решение должно быть оформлено в виде таблицы 7.1 подсчитанной вручную. Исходные данные заданы в таблице 7.2. Оценить погрешность вычислений по формуле (7.6).

Комментарий. Значения  $u_{i0}$  находим, подставляя значение  $x_0$  в  $f(x)$ . Например,  $f(x_0) = x_0 \sin(2\pi x_0)$  при  $x_0 = 0$  равна 0. Значения  $u_{0k}$  и  $u_{5k}$  определяются краевыми условиями (в нашем случае нулевые). Далее значение, например,  $u_{11}$  находим, используя формулу (7.5), т.е.  $u_{11} = \frac{u_{00} + u_{20}}{2}$  и т.д.

Таблица 7.1.

j	$x$ $l$	$x_0$	$x_0 + h$	$x_0 + 2h$	$x_0 + 3h$	$x_0 + 4h$	$x_n$
0	0	$u_{00}$	$u_{10}$	$u_{20}$	$u_{30}$	$u_{40}$	$u_{50}$
1	0.005	$u_{01}$	$u_{11}$	$u_{21}$	$u_{31}$	$u_{41}$	$u_{51}$
2	0.010	$u_{02}$	$u_{12}$	$u_{22}$	$u_{32}$	$u_{42}$	$u_{52}$
3	0.015	$u_{03}$	$u_{13}$	$u_{23}$	$u_{33}$	$u_{43}$	$u_{53}$
4	0.020	$u_{04}$	$u_{14}$	$u_{24}$	$u_{34}$	$u_{44}$	$u_{54}$
5	0.025	$u_{05}$	$u_{15}$	$u_{25}$	$u_{35}$	$u_{45}$	$u_{55}$
6	0.03	$u_{06}$	$u_{16}$	$u_{26}$	$u_{36}$	$u_{46}$	$u_{56}$

Таблица 7.2

№ варианта	$x_0$	$x_n$	$f(x)$
1	0.1	0.6	$(1.1x^2 + 1.1)\sin(2\pi(x - 0.1))$
2	0	0.5	$x\sin(2\pi x)$
3	0.2	0.7	$(1.5x + 1.1)\sin(2\pi(x - 0.2))$
4	0	0.5	$(x^2 + 3)\sin(2\pi x)$
5	0.1	0.6	$(1.1x^2 - 1.3)\sin(2\pi(x - 0.1))$
6	0.2	0.7	$(x^3 + 1)\sin(2\pi(x - 0.2))$
7	0	0.5	$(1.5x^2 + 1)\sin(2\pi x)$
8	0.2	0.7	$(3x^2 + 2)\sin(2\pi(x - 0.2))$
9	0	0.5	$(x^2 - 1.3)\sin(2\pi x)$
10	0.1	0.6	$(3x^2 - 1)\sin(2\pi(x - 0.1))$

## Примерный фрагмент выполнения работы

$$f(x) := x \cdot \cos(2 + 3 \cdot x) \quad i := 0..5 \quad j := 0..4$$

$$x_0 := 0.1 \quad x_5 := 0.6$$

$$x_1 := x_0 + \frac{(x_0 + x_5)}{6}$$

$$u_{i,0} := f(x_i) \quad u_{0,j+1} := 0 \quad u_{5,j+1} := 0$$

$$i := 1..4$$

$$u_{i,1} := \frac{(u_{i-1,0} + u_{i+1,0})}{2}$$

$$u_{i,2} := \frac{(u_{i-1,1} + u_{i+1,1})}{2}$$

$$u_{i,3} := \frac{(u_{i-1,2} + u_{i+1,2})}{2}$$

$$u_{i,4} := \frac{(u_{i-1,3} + u_{i+1,3})}{2}$$

$$u_{i,5} := \frac{(u_{i-1,4} + u_{i+1,4})}{2}$$

$$u = \begin{bmatrix} -0.191 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.352 & -0.271 & -0.176 & -0.156 & -0.132 & -0.1 \\ -0.352 & -0.352 & -0.311 & -0.264 & -0.2 & -0.176 \\ -0.352 & -0.352 & -0.352 & -0.244 & -0.22 & -0.161 \\ -0.352 & -0.352 & -0.176 & -0.176 & -0.122 & -0.11 \\ -0.352 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем суть метода сеток?
2. Какие точки называются узлами?
3. Что такое шаг сетки?
4. Какие узлы называются внутренними и какие граничными?
5. Как перейти от дифференциального уравнения к разностному (на примере уравнения теплопроводности)?
6. Какое уравнение используется для вычисления текущего слоя?
7. Как вычислить отклонение значений точного решения от приближенного по методу сеток?

## Литература

1. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. М.: Просвещение. – 1991. – 175с.
2. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений. М.: Высшая школа. – 1998. 384с.
3. Волков Е.А. Численные методы. М.: Наука. – 1987. – 248 с.
3. Турчак Л.И. Основы численных методов. М.: Наука. – 1987. – 318с.
4. Копченкова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. М.: Наука. – 1972. – 366с.
5. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т.1. М.: Наука. – 1966. – 632с.
6. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М. – С.П.: Физматлит. – 2001. – 630с.
7. С. Ф. Аминова, Р. М. Асадуллин. Лабораторный практикум по курсу «Численные методы».- Уфа: Изд-во БГПУ, 2003 –28с.
8. Р. Р. Сулейманов. Решение математических задач в системе MathCAD 8.1 // Учитель Башкортостана. 2002. № 2.
10. MATHCAD 6.0 PLUS/ Финансовые, инженерные и научные расчеты в среде Windows 95./ Пер. с англ. – М.: Информационно-издательский дом "Филинъ", 1996. – 712 с.
11. Плис А.И., Сливина Н.А. Mathcad: математический практикум. – М.: Финансы и Статистика. – 1999.
12. Очков В.Ф. Mathcad 8 Pro для студентов и инженеров. – М.: КомпьютерПресс, 1999.
13. Очков В.Ф.. MathCad 7 Pro для студентов и инженеров. – М.: КомпьютерПресс, 1998. – 384 с.
14. Дьяконов В.П. Справочник по MathCAD PLUS 6.0 PRO. – М.: СК Пресс, 1997. – 336 с.